ВІД МОДЕЛІ ІЗІНҐА ДО СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Юрій ГОЛОВАЧ

Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
вул. Свєнціцького 1, Львів 79011

Редакція отримала статтю 15 лютого 2011 р.

Стаття є коротким нарисом про статистичну фізику складних систем – напрямок досліджень, що зараз набуває характерних рис добре сформованої ділянки науки зі своїм об'єктом досліджень, понятійним апаратом, методами аналізу. Відправною точкою розповіді обрано модель Ізінґа. Крім концептуальної простоти, такий вибір дає змогу простежити за становленням та розвитком теорії фазових переходів у львівській школі статистичної фізики. Приведені міркування є стислим викладом доповіді, виголошеної на читаннях, присвячених 85-річчю академіка І.Р. Юхновського.

1 ВСТУП. ЩО ВИВЧАЄ СТАТИСТИЧНА ФІЗИКА СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Поняття *складна система* поступово стає одним із підставових понять сучасної науки, чи, ширше, все частіше виступає в загальнокультурному контексті. Так, пошук за запитом *complex system* на пошуковому сервері Google знаходить понад 79 млн. цитувань. Для порівняння: цей же сервер на запит "atom" дає 266 млн. покликів, а "molecule" – понад 24 млн. Зростання кола застосувань цього поняття, а також виявлення чи усвідомлення все ширшого кола явищ, де воно застосовне, приводить до труднощів при його строгому означенні. Як правило, мається на увазі система, яка складається з багатьох з'єднаних між собою частин, що як ціле володіють властивостями, не очевидними із властивостей окремих її частин [1].[1] Таким чином, наука про складні системи вивчає, як складові частини породжують колективну поведінку системи. У читача-фізика, мабуть, відразу виникне думка про безперспективність такої інтерпретації для фізичних багаточастинкових систем. І дійсно, у фізиці виникло (чи, точніше, зараз формується) інше розуміння складної системи: система є складною, якщо її поведінка кардинальним чином залежить від деталей системи [2]. При цьому маються на увазі такі явища як детерміністичний хаос, квантове заплутування, виникнення третинної структури макромолекул

PACS numbers 01.75.+m; 05.50.+q; 89.75.-k

[1] Поклики на літературні джерела вказують на деякі важливі чи цікаві, з погляду автора, роботи. Їх перелік не претендує на вичерпність чи повноту.

білків, виникнення стану спінового скла, тощо. Згадані явища дуже різні і теоретично досліджуються різними ділянками фізики (теорія динамічних систем, квантова механіка, статистична фізика). Проте їх спільною рисою є те, що інфінітезимальна зміна у (різних за фізичною природою) початкових умовах призводить до докорінно різних сценаріїв еволюції.

В цій статті йтиме мова про статистичну фізику складних систем. А отже, про колективні ефекти. *More is different* – такий заголовок статті Нобелівського лауреата Філіпа Андерсона [3], що часто приводиться як певний початок відліку цієї науки. Передусім мається на увазі колективна поведінка, яку не можна передбачити на підставі властивостей окремих складових або і взаємодій між декількома складовими [4]. Така поведінка може виникати, наприклад, під впливом фрустрацій чи структурного безладу. Як результат, рівноважний стан тяжко досягнути, а відгук на збурення є дуже повільним і часто випадковим [2, 4, 5, 6]. Аналіз таких ефектів привів до розробки методів та виникнення концепцій, що з часом були успішно застосовані для опису формально подібних явищ у хімічних, біологічних, соціальних та інших системах, що складаються з багатьох так званих агентів нефізичної природи (див., наприклад [7, 8]). Тому часто до задач статистичної фізики складних систем відносять і так звані екзотичні задачі статичної фізики, коли методи і концепції цієї науки застосовуються до нефізичних об'єктів [9].

Нижче ми приведемо короткий нарис про статистичну фізику складних систем – напрямок досліджень, що зараз набуває характерних рис добре сформованої ділянки науки із своїм об'єктом досліджень, понятійним апаратом, методами аналізу. Відправною точкою розповіді оберемо модель Ізінґа. Крім концептуальної простоти, такий вибір дає змогу простежити за становленням та розвитком теорії фазових переходів у львівській школі статистичної фізики. Приведені міркування є стислим викладом доповіді, виголошеної на читаннях, присвячених 85-річчю академіка І.Р. Юхновського. Автор вважає високою честю для себе подати цю статтю у збірку, присвячену Ігореві Рафаїловичу, і тим самим долучитися до щирих вітань його численних і вдячних учнів.

План дальшої розповіді такий: в розділі 2 на підставі моделі Ізінґа буде введено основні фізичні поняття, важливі для подальшої розповіді, а також коротко згадано про дослідження цієї моделі в роботах І.Р. Юхновського та його учнів. Розділи 3 та 4 присвячені розгляду деяких задач статистичної фізики складних систем, причому в розділі 3 розглянуто традиційні фізичні об'єкти, а розділ 4 присвячений екзотичним задачам статистичної фізики. Міркування про сучасне і майбутнє статистичної фізики складних систем приведені в розділі 5.

2 МОДЕЛЬ ІЗІНҐА В СВІТІ ТА МОДЕЛЬ ІЗІНҐА У ЛЬВОВІ

Традиційно історія моделі Ізінґа розпочинається із задачі, поставленої Вільгельмом Ленцом своєму учневі, Ернсту Ізінґу. Розв'язок одновимірного ($d = 1$) варіанту цієї моделі став основою докторської дисертації Ернста Ізінґа [10] і спричинив певне розчарування відсутністю феромагнетизму, виникнення якого модель якраз і була покликана пояснити. Однак, як стало зрозуміло з подальших досліджень, виклад яких є основою підручників з теорії фазових переходів та критичних явищ [11], просторова вимірність $d = 1$ є нижньою критичною вимірністю цієї моделі: феромагнетизм присутній при $d > 1$. Історія досліджень та застосувань цієї моделі багата і різноманітна [7, 11, 9] як багатим на події і насиченим було життя самого Ернста Ізінґа (Ernst Ising, 10.05.1900, Кьольн, Німеччина – 11.05.1998, Пеорія, Іллінойс, США) [12].

Рис. 1. Син Ернста Ізінґа Том в місті Рекінґен/Мерш (Люксембурґ) на вулиці, що носить ім'я батька [13]. Тут сім'я Ізінґів рятувалась в часи другої світової війни.

В контексті подальшої розповіді буде важливо записати гамільтоніан моделі Ізінґа. Нагадаємо, що модель описує систему N взаємодіючих класичних векторів ("спінів"), розташованих на вузлах d-вимірної ґратки. Кожен вектор може перебувати в двох станах (вгору і вниз):

$$H = -\sum_{<i,j>} S_i S_j - h \sum_i S_i. \tag{1}$$

Тут підсумовування ведеться за найближчими сусідами на d-вимірній ґратці, $S_i = \pm 1$, а h – зовнішнє магнітне поле. Такий простий гамільтоніан багаточастинкової взаємодіючої системи приводить (при $d > 1$) у термодинамічній границі $N \to \infty$ до виникнення колективного ефекту: при низьких температурах $T < T_c$ при відсутності зовнішнього поля $h = 0$ у системі присутня спонтанна намагніченість M, а при малих $\tau = |T - T_c|/T_c$ і h термодинамічні величини описуються степеневими законами (законами *скейлінґу*). Так, температурна залежність спонтанної намагніченості, питомої теплоємності і ізотермічної сприйнятливості при $h = 0$ має вигляд:

$$M \simeq B\tau^{\beta}\,, \quad c_h \simeq A^{\pm}\tau^{-\alpha}\,, \quad \chi_T \simeq \Gamma^{\pm}\tau^{-\gamma}\,, \tag{2}$$

де $B, A^{\pm}, \Gamma^{\pm}$ – критичні амплітуди при $T - T_c \to 0^{\pm}$, відповідно, а β, α, γ – критичні показники. При $\tau = 0$ ці ж термодинамічні величини є степеневими функціями магнітного поля:

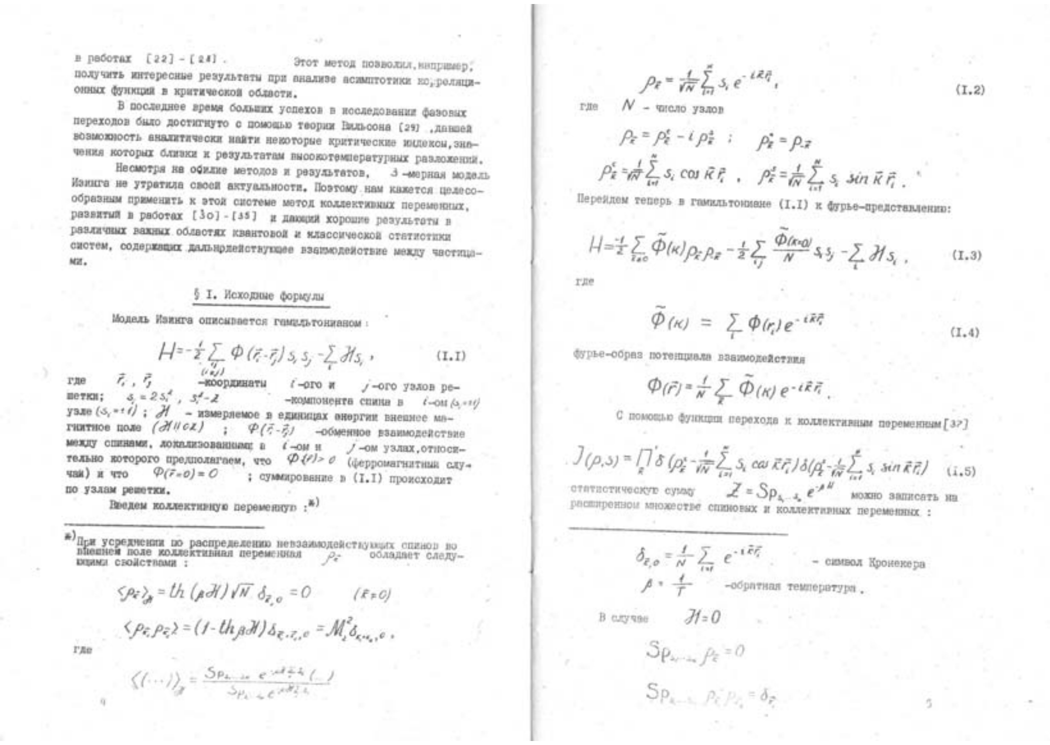
$$h \simeq D_c M|M|^{\delta-1}\,, \quad c_h \simeq A_c h^{-\alpha_c}\,, \quad \chi_T \simeq \Gamma_c h^{-\gamma_c}\,, \tag{3}$$

з критичними амплітудами D_c, A_c, Γ_c і критичними показниками $\delta, \alpha_c, \gamma_c$. В самій критичній точці степеневою стає і асимптотика спін-спінової кореляційної функції. Окрім скейлінґу, особливою рисою критичної поведінки є її *універсальність*: критичні показники та певні співвідношення критичних амплітуд залежать лише від так званих глобальних змінних (таких як вимірність простору, вимірність та симетрія параметра порядку) [14]. Тому критична поведінка дуже різних систем описується тими ж самими законами (кажуть, що ці різні системи залежать до одного класу універсальності), і тому така проста модель, як модель Ізінґа, дає кількісно адекватний опис критичності таких різних об'єктів, як одновісні магнетики, прості рідини, бінарні сплави та ін.

Звернемо увагу читача на три концепції, зміст яких дає змогу прояснити розгляд моделі Ізінґа: (i) виникнення складної критичної поведінки генерованої простим законом міжчастинкової взаємодії; (ii) скейлінґ; (iii) універсальність. У двох наступних розділах ми проілюструємо, яким новим змістом наповнюються ці концепції при розгляді різних задач статистичної фізики складних систем. Перед тим, як перейти до розгляду таких задач, зазначимо, що виникнення цих концепцій пов'язане і з діяльністю львівської школи статистичної фізики. Перші роботи І.Р. Юхновського та його учнів, в яких розглядалась тривимірна модель Ізінґа, датуються початком 70-х років минулого століття (див. підсумкові монографії [16] та Рис. 2). Це час, коли творилась сучасна теорія фазових переходів, і хочеться з приємністю відзначити вклад Ігора Рафаїловича та його учнів і послідовників в становлення та розвиток цієї теорії.

3 ФІЗИЧНІ ОБ'ЄКТИ ЯК СКЛАДНІ СИСТЕМИ

Тяжка і марна справа перелічувати різні фізичні об'єкти, чи навіть класи об'єктів, в яких спостерігається характерна для складних систем поведінка. Нижче ми приведемо лише два приклади, один із них стосується фізики твердого тіла, а інший – м'якої речовини (soft matter). Ці приклади приведено і тому, що вони стосуються зовсім різних за своєю природою об'єктів – фрустрованих і структурно невпорядкованих магнетиків (підрозділ 3.1) і полімерних макромолекул (підрозділ 3.2), і тому, що складна кооперативна поведінка керується в них різними параметрами – температурою та хімічним потенціалом, і, нарешті,



в работах [22] - [24]. Этот метод позволил, например, получить интересные результаты при анализе асимптотики корреляционных функций в критической области.

В последнее время больших успехов в исследовании фазовых переходов было достигнуто с помощью теории Вильсона [29], давшей возможность аналитически найти некоторые критические индексы, значения которых близки к результатам высокотемпературных разложений.

Несмотря на обилие методов и результатов, 3-мерная модель Изинга не утратила своей актуальности. Поэтому нам кажется целесообразным применить к этой системе метод коллективных переменных, развитый в работах [30] - [35] и дающий хорошие результаты в различных важных областях квантовой и классической статистики систем, содержащих дальнодействующее взаимодействие между частицами.

§ I. Исходные формулы

Модель Изинга описывается гамильтонианом :

$$H=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ (i\neq j)}}\Phi(\vec{r}_i-\vec{r}_j)s_i s_j-\sum_i \mathcal{H}s_i, \qquad (I.1)$$

где $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ -координаты i-ого и j-ого узлов решетки; $s_i=2s_i^z$, s_i^z-z -компонента спина в i-ом $(s_i=\pm1)$ узле $(s_i=\pm1)$; $\mathcal{H}$ - измеряемое в единицах энергии внешнее магнитное поле $(\mathcal{H}\parallel oz)$; $\Phi(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$ -обменное взаимодействие между спинами, локализованными в i-ом и j-ом узлах, относительно которого предполагаем, что $\Phi(r)>0$ (ферромагнитный случай) и что $\Phi(\vec{r}=0)=0$; суммирование в (I.1) происходит по узлам решетки.

Введем коллективную переменную :*)

$$\rho_{\vec{k}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}s_i e^{-i\vec{k}\vec{r}_i}, \qquad (I.2)$$

где N - число узлов

$$\rho_{\vec{k}}=\rho_{\vec{k}}^c-i\rho_{\vec{k}}^s \ ; \quad \rho_{\vec{k}}^*=\rho_{-\vec{k}}$$

$$\rho_{\vec{k}}^c=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}s_i\cos\vec{k}\vec{r}_i\ , \quad \rho_{\vec{k}}^s=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}s_i\sin\vec{k}\vec{r}_i\ .$$

Перейдем теперь в гамильтониане (I.1) к фурье-представлению:

$$H=-\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\neq0}\tilde{\Phi}(k)\rho_{\vec{k}}\rho_{-\vec{k}}-\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\tilde{\Phi}(k=0)}{N}s_i s_j-\sum_i\mathcal{H}s_i\ , \qquad (I.3)$$

где

$$\tilde{\Phi}(k)=\sum_i\Phi(r_i)e^{-i\vec{k}\vec{r}_i} \qquad (I.4)$$

фурье-образ потенциала взаимодействия

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\tilde{\Phi}(k)e^{-i\vec{k}\vec{r}_i}\ .$$

С помощью функции перехода к коллективным переменным [37]

$$J(\rho,s)=\prod_{\vec{k}}{}'\delta\Big(\rho_{\vec{k}}^c-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}s_i\cos\vec{k}\vec{r}_i\Big)\delta\Big(\rho_{\vec{k}}^s-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}s_i\sin\vec{k}\vec{r}_i\Big) \qquad (I.5)$$

статистическую сумму $Z=Sp_{s_1\ldots s_N}e^{-\beta H}$ можно записать на расширенном множестве спиновых и коллективных переменных :

---

*) При усреднении по распределению невзаимодействующих спинов во внешнем поле коллективная переменная $\rho_{\vec{k}}$ обладает следующими свойствами :

$$\langle\rho_{\vec{k}}\rangle_{\mathcal{H}}=th(\beta\mathcal{H})\sqrt{N}\,\delta_{\vec{k},0}=0 \qquad (\vec{k}\neq0)$$

$$\langle\rho_{\vec{k}_1}\rho_{\vec{k}_2}\rangle=(1-th\,\beta\mathcal{H})\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,0}=\mathcal{M}_2\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,0}\ ,$$

где

$$\langle(\ldots)\rangle_{\mathcal{H}}=\frac{Sp_{s_1\ldots s_N}e^{\beta\mathcal{H}\sum_i s_i}(\ldots)}{Sp_{s_1\ldots s_N}e^{\beta\mathcal{H}\sum_i s_i}}$$

4

$$\delta_{\vec{k},0}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}e^{-i\vec{k}\vec{r}_i} \quad \text{- символ Кронекера}$$

$$\beta=\frac{1}{T} \quad \text{-обратная температура .}$$

В случае $\mathcal{H}=0$

$$Sp_{s_1\ldots s_N}\rho_{\vec{k}}=0$$

$$Sp_{s_1\ldots s_N}\rho_{\vec{k}_1}\rho_{\vec{k}_2}=\delta_{\vec{k}}$$

5

Рис. 2. Сторінка з препринту І.Р. Юхновського, Ю.К. Рудавського *Применение метода коллективных переменных к модели Изинга. I. Статистическая сумма* [15]: так починалися дослідження тривимірної моделі Ізинґа у Львові.

тому, що їх дослідження стосувалось кола зацікавлення автора і його колег [17, 18, 19].

3.1 Спінові ґраткові системи

Класичним прикладом складної системи, що описується методами статистичної фізики, є спінове скло – структурно невпорядкований магнетик із фрустрованими взаємодіями. Спінове скло характерне багатьма метастабільними станами, що, в свою чергу, приводить до присутності в системі багатьох часових масштабів [20]. Складність опису спінового скла привела, зокрема, до розгляду часткових випадків, що описуються регулярними (структурно-впорядкованими) фрустрованими моделями, чи структурно невпорядкованими моделями, але без фрустрацій [17]. Розглянемо декілька таких спінових моделей.

В той час як кількісний аналіз критичної поведінки при фазовому переході в магнетовпорядкований стан в ідеалізованих базових моделях (таких, як описана в попередньому розділі модель Ізинґа) на сьогодні здійснений з високою точністю і, фактично, складає головний зміст сучасної теорії фазових переходів [11, 21], опис критичності за присутності таких реалістичних умов як структурний безлад, анізотропія, фрустрації, чи ефекти скінченого об'єму є актуальною, важкою і цікавою задачею. Така задача актуальна, бо реальні об'єкти, в яких відбувається магнітний фазовий перехід, часто характеризуються структурним безладом заміщення (тверді розчини антиферомагнетиків та їх немагнітних ізоморфів), локальною випадковою анізотропією (аморфні сплави рідкісноземельних з перехідними металами), фрустраціями (шаруваті трикутні антиферомагнетики, гелімагнетики). Така задача важка, бо поряд із звичайними труднощами, що виникають при описі критичності, доводиться долати труднощі теорії невпорядкованих систем. А цікавість і перспективність такої задачі полягає і в тому, що завдяки універсальності критичної поведінки, описані ефекти можуть спостерігатися не лише в магнітних системах і не лише в об'єктах фізики конденсованих систем.

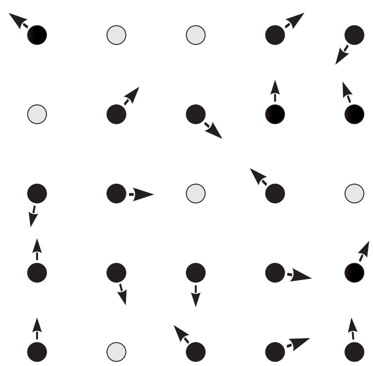
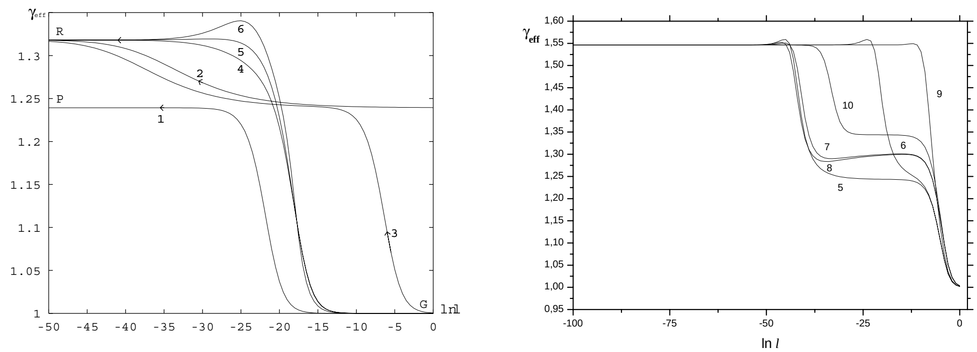


Рис. 3. Ґраткова модель m-векторного розведеного магнетика: частина вузлів d-вимірної ґратки зайнята класичними m-компонентними векторами (елементарними магнітними моментами), що взаємодіють між собою. Решта вузлів вільна або зайнята немагнітними атомами [17] $^{\mathbf{b}}$.

Одним із способів узагальнення моделі Ізінґа для розгляду структурно-невпорядкованих систем є ґраткова модель m-векторного розведеного магнетика (див. Рис. 3) з гамільтоніаном:

$$H = -\sum_{<i,j>} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j c_i c_j. \tag{4}$$

Гамільтоніан (4) записаний за відсутності зовнішнього поля і містить скалярний добуток m-компонентних векторів $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}_j$, локалізованих на вузлах i, j, відповідно, а числа заповнення c_i приймають значення 1, якщо вузол i зайнятий спіном і 0, якщо вузол i вільний (чи



a) **b)**

Рис. 4. Теоретичні обчислення зміни значення ефективного критичного показника ізотермічної сприйнятливості $\gamma_{\rm eff}$ при наближенні до критичної точки. Різні криві відповідають різним можливим сценаріям ефективної критичної поведінки. Граничне значення теоретичного ренормгрупового параметру $\ell \to 0$ відповідає границі $T \to T_c$. **a:** тривимірна розведена модель Ізінґа ((4) при $d = 3$, $m = 1$) [17] [a]. Спостерігається критична поведінка, що відповідає класам універсальності ґаусової моделі (**G**), чистої (**P**) та розведеної (**R**) моделі Ізінґа. **b:** тривимірна модель з віссю анізотропії, випадково розподіленою вздовж ребер m-вимірного гіперкуба ((5) при $d = 3$, $m = 2$) [17] [c]. Різні плато відповідають різним класам універсальності.

зайнятий немагнітним атомом). Розглянемо ситуацію, коли магнітні і немагнітні вузли зафіксовані в певній конфігурації: це так званий заморожений безлад (quenched disorder) [17], він реалізується, наприклад, при швидкій зміні температури розплаву, коли час релаксації системи до рівноважного стану набагато більший від типового часу спостереження. Виявляється, що навіть при слабкому розведенні немагнітною компонентою, коли концентрація магнітних вузлів $c \lesssim 1$, а кореляції в розподілі зайнятих і вільних вузлів відсутні, в системі спостерігається складна критична поведінка. При цьому може відбуватися, зокрема, зміна класу універсальності – коли при розведенні змінюються асимптотичні значення критичних показників та відношень критичних амплітуд, або складна ефективна критична поведінка – коли при наближенні до критичної точки в системі послідовно спостерігаються степеневі закони (2), (3) характерні для декількох різних класів універсальності.

На Рис. 4**a** зображено один із результатів теоретичного аналізу критичної поведінки моделі (4) при $d = 3$, $m = 1$ (тривимірна розведена модель Ізінґа) методом теоретико-польової ренормалізаційної групи [17] [a]. При наближенні до критичної точки ($\ell(T \to T_c) \to 0$) можуть спостерігатися різні сценарії ефективної критичної поведінки, що супроводжує фазовий перехід другого роду в магнетовпорядкований стан. Більше того, може змінюватися і тип фазового переходу.

Спричинену замороженим безладом зміну типу фазового переходу добре прослідкувати на прикладі моделі з випадковою анізотропією, що описується гамільтоніаном [17] $^{\mathbf{c}}$:

$$H = -\sum_{<i,j>} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \sum_i D\Big(\mathbf{S}_i \hat{\mathbf{x}}_i\Big)^2. \qquad (5)$$

На відміну від гамільтоніану розведеної моделі (4), тут магнітні моменти займають всі вузли ґратки. Структурний безлад описується в (5) другим доданком, де $\hat{\mathbf{x}}_i$ – випадково спрямований заморожений одиничний вектор, а $D > 0$ – стала анізотропії. Цей доданок робить спрямування локального магнітного моменту вздовж локальної осі випадкової анізотропії енергетично вигідним. Така модель широко застосовується для опису аморфних магнетиків. Як підтверджують результати експериментів, теоретичних розрахунків і числового моделювання, навіть слаба ($D \ll 1$) анізотропія може спричинити кардинальні зміни у критичній поведінці. Зокрема, в тривимірній моделі феромагнетизм відсутній при ізотропно розподіленій локальній осі анізотропії і низькотемпературна фаза є фазою спінового скла. Для анізотропного розподілу фазовий перехід може залишатися фазовим переходом другого роду, проте клас універсальності змінюється (див. Рис. 4**b** і огляд [17] $^{\mathbf{c}}$).

Природними узагальненнями та урізноманітненням описаних вище моделей (4), (5) є врахування кореляцій між випадковими змінними (для опису так званих протяжних домішок), розгляд інших типів структурного безладу (випадкові поля, випадкові взаємодії) та їх сукупного впливу. Такі задачі якраз і розглядаються при аналізі кооперативної поведінки спінових ґраткових моделей [17, 21]. Саме при їх розгляді виникає сучасне розуміння кооперативної поведінки складних систем, для якої характерні виникнення складної критичної поведінки генерованої простим законом міжчастинкової взаємодії, скейлінґ та універсальність – концепції запроваджені в попередньому розділі на прикладі моделі Ізінґа.

3.2 М'яка речовина

Концепція скейлінгу в околі фазового переходу другого роду знайшла свій дальший розвиток і численні застосування у фізиці м'якої речовини. Ще в роботах Нобелівського лауреата та закордонного дійсного члена НАН України П'єра-Жіля де Жена (*Pierre-Gilles de Gennes*, 1932 – 2007) вказано на глибокий зв'язок між фізикою критичних явищ і фізикою макромолекул [22]. Зокрема, поняття складності фігурує у формулюванні Нобелівського комітету: премія 1991 року була присуджена П.-Ж. де Жену за "...discovering that methods developed for studying order phenomena in simple systems can be generalized to more *complex forms of matter*, in particular to liquid crystals and polymers..." [23][2].

Добре відомо, що конформаційні властивості довгих полімерних ланцюгів в доброму розчиннику підлягають степеневим законам – законам скейлінґу. На відміну від температурної чи польової залежності

[2]Курсив мій, Ю.Г.

термодинамічних величин в околі точки фазового переходу (2), (3), для гнучких полімерних ланцюгів степеневі закони виникають в границі $N \to \infty$, де N – кількість мономерів, що утворюють полімерний ланцюг. Так, середній характерний розмір $\mathcal{R}$ і кількість конфігурацій $\mathcal{Z}$ полімерного клубка зростають з N як

$$\mathcal{R} \sim N^{\nu}, \quad \mathcal{Z} \sim z^{N} N^{\gamma-1}. \tag{6}$$

Тут z – неуніверсальна стала (фугативність), а ν, γ – приклади полімерних критичних показників. Подібно як в теорії критичних явищ, для гнучкого полімеру ці показники *універсальні* – незалежні від особливостей хімічного складу макромолекули і залежать лише від вимірності простору. Пошук форми законів (6) привів не лише до створення сучасної теоретичної фізики і хімії полімерів, але і дозволив встановити глибокий зв'язок, що існує між фізикою критичних явищ і фізикою макромолекул. Зокрема, скейлінґові властивості полімерних ланцюгів належать до того ж класу універсальності, що і властивості граткових блукань із самоуниканням (self avoiding walks, SAW). А останні, в свою чергу, ідеально описуються m-векторною моделлю в границі $m \to 0$. В попередньому підрозділі ми приводили гамільтоніан розведеної m-векторної моделі, формула (4). При відсутності розведення цей гамільтоніан має просту форму:

$$H = -\sum_{<i,j>} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j. \tag{7}$$

Вимірність m входить як вимірність вектора $\mathbf{S} = (S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)})$ і тому границя $m \to 0$, строго кажучи, не має сенсу для гамільтоніану (7). Як показано в роботах де Жена і його школи, ця границя набуває сенсу при обчисленні термодинаміки: аналітичне продовження за m робить задачу обчислення термодинамічних функцій моделі добре означеною в границі $m \to 0$. Більше того, в цій границі природнім чином виникає статистика блукань із самоуниканнями [22].

Степеневим законам підлягають й інші спостережувані, що описують конформаційні властивості полімерних ланцюгів та інших макромолекулярних утворень, складних як за топологією (полімерні сітки та зірки), так і за хімічним складом (кополімери та кополімерні сітки). Так, кількість конфігурацій зіркового полімера – макромолекули, що складається з полімерних лакцюгів, приєднаних до спільного кору – подібно до (6) підлягає законам скейлінґу [18] [a]:

$$\mathcal{Z}_f \sim z^{Nf} N^{\gamma_f - 1} \sim \mathcal{R}^{\eta_f - f\eta_2}. \tag{8}$$

Тут f – кількість ланцюгів, $N, \mathcal{R}$ – кількість мономерів у окремому ланцюгу та його характерний розмір, а γ_f, η_f – універсальні критичні показники. Однак тепер глобальними змінними, від яких залежать критичні показники є не лише вимірність простору d а і функціональність зіркового полімера (кількість окремих ланцюгів в зірці) f. Таким чином, скейлінґ зіркових полімерів різної функціональності керується різними значеннями критичних показників. Кількість глобальних змінних зростає при розгляді багатосортних зіркових полімерів. Так, для зіркового кополімера – полімерної зірки, що складається з f_1 ланцюгів сорту 1 і f_2 ланцюгів сорту 2 – кількість конфігурацій змінюється з $\mathcal{R}$ як:

$$\mathcal{Z}_{f_1 f_2} \sim \mathcal{R}^{\eta_{f_1 f_2} - f_1 \eta_{20} - f_2 \eta_{02}} \, . \tag{9}$$

Тут критичні показники $\eta_{f_1 f_2}$ залежать від трьох глобальних змінних d, f_1, f_2.

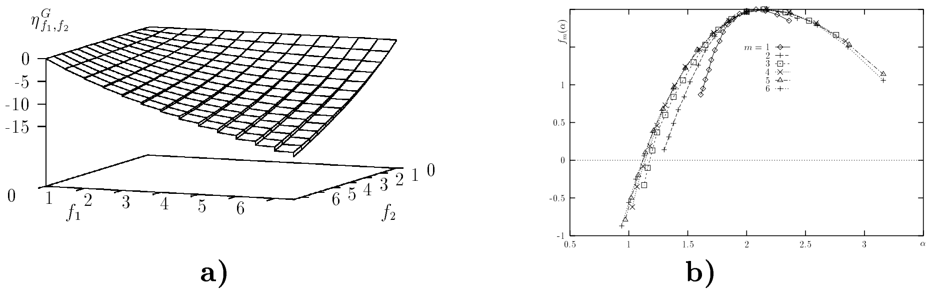


Рис. 5. Універсальні характеристики скейлінґу складних полімерів та пов'язаних з цим явищ. **a:** показник $\eta_{f_1 f_2}$ (9) двовимірної ($d = 2$) полімерної зірки утвореної двома наборами f_1 і f_2 взаємноуникних випадкових блукань (random walks) [18][a]. Сходинки на "килимі" відповідають різниці у значеннях, отриманих в різних теоретичних підходах. Значення на діагоналі відповідають показнику скейлінґу однорідної полімерної зірки η_{2f} (8). **b:** Спектральна функція, що кількісно описує явище дифузії частинок біля адсорбера у формі зірки з m полімерних ланцюгів [18][b].

Знання приведених вище законів (6), (8), (9) дає змогу не тільки здійснити кількісний опис низки явищ, що відбуваються за участю полімерів, а і теоретично пояснити різні ефекти, для яких важлива статистика випадкових блукань. Серед таких ефектів – фазове розшарування суміші зіркових полімерів в пористому середовищі; зміна властивостей керованих дифузією реакцій із пастками, якщо пастка знаходиться на полімерному ланцюгові або на полімерній зірці; виникнення мультифрактальної поведінки у макромолекулярних системах; зміна роду фазового переходу при розчепленні молекули ДНК (unzipping transition) [18].

На Рис. 5 зображені результати теоретичного аналізу скейлінґу складних полімерів [18][a,b]. Рис. 5**a** зображає показник $\eta_{f_1 f_2}$ (9) двовимірної двосортної полімерної зірки як функцію кількості ланцюгів f_1 і f_2. При отриманні цього результату вважалося, що окремі ланцюги ведуть себе як випадкові блукання (їм дозволено перетинатися). У фізиці макромолекул така ситуація відповідає так званій Θ-точці (аналогічній точці Бойля в термодинаміці, коли реальний газ веде себе як ідеальний). Однак статистиці випадкових блукань підлягають й інші задачі, зокрема, задача про дифузію, коли блукання описує траєкторію частинки. Така інтерпретація дозволила застосувати результати для показників $\eta_{f_1 f_2}$ (і теорію, що дає змогу отримати ці результати) для опису явища дифузії частинок біля полімерного адсорбера [18] **b** . Виявляється, що кількісні характеристики такого явища описуються мультифрактальними спектрами [24], які, як правило, важко піддаються аналітичному опису і переважно аналізуються числовими методами. Рис. 5**b** показує один із результатів аналітичних розрахунків для так званої спектральної функції, що кількісно описує явище дифузії частинок біля адсорбера у формі зірки з m полімерних ланцюгів. Зауважимо, що результати для показників $\eta_{f_1 f_2}$ (Рис. 5**a**) отримані за допомогою методу теоретико-польової ренормалізаційної групи. Таким чином, їх застосування для обчислення спектральної функції прокладає місток між теорією поля та теорією мультифракталів, що само по собі є цікавим результатом, який може мати добрі перспективи.

На закінчення цього підрозділу звернемо увагу на особливості кооперативної поведінки складних полімерних систем, спільні з особливостями ґраткових магнетиків підрозділу 3.1. Це знову складна критична поведінка генерована простим законом взаємодії (7), скейлінґ (6), (8), (9) та універсальність.

4 ЕКЗОТИЧНІ ЗАДАЧІ СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

В цьому розділі ми наведемо декілька прикладів задач, де методи і концепції статистичної фізики використовуються для аналізу систем багатьох агентів нефізичної природи, що взаємодіють між собою – так званих екзотичних задач статистичної фізики. При цьому знову наголос буде зроблено на складну поведінку, що виникає в таких системах і прослідковано подібність цієї поведінки до відповідних ефектів, що спостерігаються в багаточастинкових фізичних задачах.

4.1 Соціофізика, еконофізика та інші

Можна вибирати різні початки відліку застосування концепцій природничих наук для опису явищ, що відбуваються в суспільстві. Так, як приклад такого пошуку аналогій наводять висловлювання давньогрецького філософа Емпедокла (*Ἐμπεδοκλῆς*, $\sim 490 - -430$ до Р.Х.) про те, що люди подібні до рідин: деякі легко змішуються між собою, як вино і вода, а деякі – ні, як олія і вода.[3] Набагато пізніше, італійський економіст Вільфредо Парето (*Vilfredo Pareto*, 1848 – 1923) порівнював відкритий ним в 1906 році закон розподілу багатства з законами Кеплера.

Сам термін *соціофізика* зустрічається в назві книжки бельгійського астронома, математика і соціолога Адольфа Кетле (*Adolphe Quetelet*, 1796 – 1874): *Sur l'hommee et le developpement de ses facultés, essai d'une physique sociale* (англійський переклад див. в [26]). В цій роботі Кетле простежує низку аналогій між фізикою та астрономією, з одного боку, та суспільним життям, з іншого; пояснює важливість нормального

[3] Подібна ідея знайшла кількісне вираження в так званій моделі Шелінга, див. [25].

розподілу для опису суспільних явищ; запроваджує концепцію "середньої людини" з індивідуальними випадковими флюктуаціями; запропонований ним індекс Кетлє (відношення вага/ріст) є прикладом фізичної концепції характеристичної сталої в житті людини. Хоча термін *еконофізика* виник лише наприкінці XX століття, одним із наріжних каменів цієї науки вважається дисертація французького математика Луї Башельє (*Louis Bachelier*, 1870 – 1946) *Théorie de la spéculation* [27]. В цій роботі Башельє вперше запровадив концепції випадкових блукань (до появи моделі Айнштайна броунівського руху в 1905 р.) і стохастичного процесу (до робіт А. Маркова (1906) та Н. Вінера (1940)) і використав їх для аналізу фінансів, а для виведення ґаусового розподілу ймовірності він використав порівняння з аналітичною теорією переносу тепла.

Однак, не зважаючи на застосування кількісних методів аналізу, фізичних концепцій та аналогій з фізичними системами, згадані роботи Кетлє, Башельє та інших корифеїв привели до виникнення таких наук як соціологія і фінансова математика, які, очевидно, не є ділянками фізики.[4] Сучасне розуміння задач соціо- та еконофізики сформувалося набагато пізніше, а певною мірою формується і тепер. І пов'язане воно, в першу чергу, із кількісним аналізом того кола явищ в суспільстві чи в економіці, де прослідковуються прямі аналогії із поведінкою складних багаточастинкових систем. Так, при розгляді функції розподілу зміни цін на ринку виявилося [28], що хвіст цієї функції містить набагато більше подій, ніж це випливає із запровадженого в роботах Башельє ґаусового розподілу. Такі розподіли отримали назву розподілів із товстим хвостом (fat tail distributions), а події, що описувалися таким хвостом отримали назву рідкісних подій (rare events) чи цунамі. Як правило, такі хвости мали степеневу асимптотику і ця асимптотика часто виявлялася однаковою для різних явищ [29]. А отже, емпірично спостерігався скейлінґ і універсальність – риси, характерні для поведінки складних систем, для кількісного опису і пояснення яких можна було застосувати потужний апарат статистичної фізики.

Сам термін еконофізика завдячує своїй появі в 1994 американському фізикові Джіну Стенлі (H. Eugene (Gene) Stanley), перша конференція з цієї дисципліни була організована в Будапешті в липні 1997 р. Яношем Кертешом (János Kertész) та Імре Кондором (Imre Kondor). Дещо раніше виник тепер майже невживаний термін *phynance* (= physics + finance). Зараз еконофізиці присвячено цілу низку монографій (найбільш цитованою залишається [28]), окремі журнали чи їх розділи, щороку відбуваються численні конференції, а вже використаний на початку цієї статті експеримент із використанням пошукового сервера Google дає понад 575 тис. покликів у відповідь на запит "econophysics". Загалом, предметом задач еконофізики є зрозуміти і кількісно описати, як взаємодія між багатьма агентами приводить до складної поведінки, при якій в системі виникають нові властивості, які не можна отримати простим накопиченням властивостей окремих її компонент.

[4] Коли французький філософ і засновник соціології Огюст Конт (*Auguste Comte*, 1798 – 1857) дізнався, що Кетлє використовує його термін *соціальна фізика*, він запровадив термін *sociologie* (соціологія), бо не погоджувався із статистичним відбором Кетлє.

Незважаючи на те, що терміну соціофізика вже майже двісті років [26], сучасне його розуміння сформувалося також зовсім недавно, початком нового відліку можна вважати 80-ті роки XX століття [30]. Завданням соціофізики є моделювання методами статистичної фізики таких великомасштабних соціальних явищ як формування точки зору (opinion formation), розповсюдження культур, походження і еволюція мови, поведінка юрми, динаміка популяцій, поширення епідемій, тощо. І знову, як і в приведених вище прикладах, робляться спроби вивчати колективну поведінку, що виникає із взаємодій між індивідуумами як елементарними одиницями соціальних структур. І знову, скейлінґ і універсальність виявляються центральними рисами цієї поведінки.

4.2 Зіпф, Парето, Бредфорд...

Оскільки виникнення степеневого закону є майже неодмінним атрибутом поведінки складних багаточастинкових систем, розглянемо в цьому підрозділі декілька прикладів його виникнення і дії в складних системах нефізичної природи. Як правило, такий закон називають законом Зіпфа, за іменем американського лінґвіста Джорджа Зіпфа (*George Kingsley Zipf*, 1902 – 1950). Застосовуючи кількісні методи до аналізу слів у тексті, він виявив, що частота f, з якою задане слово зустрічається в тексті, є степеневою функцією рангу r цього слова – його місця у впорядкованому за спаданням частоти списку всіх слів тексту [32] (див. табл. 1):

$$f(r) = \frac{A}{r^{\alpha}}, \tag{10}$$

де A – стала нормування, а показник степеня α довший час вважався однаковим для різних мов ($\alpha \simeq 1$ – див. Рис. 6) і незалежним від таких факторів як автор, жанр, час написання твору тощо. Як показує детальніший огляд літературних джерел, Джорджа Зіпфа не був першим, хто зауважив степеневе спадання функції (10) для слів у тексті: раніше подібні міркування висловлювали Ж. Б. Есту (*J. B. Estoup*, 1916) та Е. У. Кондон (*E. U. Condon*, 1928) [31].

В різний час степеневі розподіли, що описують статистику систем багатьох взаємодіючих агентів були відкриті у різних специфічних ділянках, і часто носять ім'я своїх першовідкривачів: в економіці це вже згаданий в попередньому підрозділі розподіл прибутків між власниками (Парето, 1896), в демографії – розподіл міст за їх розміром (Ауербах, *F. Auerbach*, 1913), в біології це розподіл біологічних родин за кількістю видів, що у них входять (Вілліс і Юль, *J. C. Willis, G. Yule*, 1922), в наукометрії – розподіл статей, написаних окремими вченими (Лотка, *A. J. Lotka*, 1926), наукових журналів за кількістю опублікованих статей (Бредфорд, *S. C. Bradford* 1934), цитувань наукових статей (Прайс, *D. de S. Price*, 1965). Цей перелік можна продовжити [31].

Широке коло явищ, що описуються розподілами з "товстими хвостами", породжує принаймні два підставові твердження: (і) причини їх виникнення мають бути достатньо загальними і не залежати від індивідуальних особливостей їх складових, (іі) те, що різні явища описуються однаковими степеневими законами, ще не означає, що причини

r	f	слово	r	f	слово
1	439	я	1	165	він
2	323	не	2	163	в
3	312	в	3	143	не
4	272	і	4	140	і
5	233	ти	5	128	той
6	222	що	6	125	що
7	214	на	7	125	на
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	140	лис	12	87	капець
21	109	Микита	18	69	Абу-Касим
23	98	вовк	40	28	пан
25	88	цар	41	27	суддя

Таблиця 1. Приклади впорядкованих за рангом r слів із творів Івана Франка “Лис Микита” (ліва частина таблиці) та “Абу-Касимові капці” (права частина). f – кількість появ (частота) слова в тексті [19] **b**.

їх виникнення – однакові. На сьогодні немає єдиної думки про те, чому перелічені вище розподіли мають степеневу форму, більше того, їх виникнення можна пояснити різними механізмами [19, 31]. Зараз робляться спроби класифікувати різні моделі, що описують виникнення степеневих законів за певними принциповими ознаками, подібно до того, як в теорії критичних явищ виділяються різні класи універсальності. При такій класифікації, окремий клас відводиться самим критичним явищам (при цьому механізмом, що породжує степеневі закони є наростання флуктуацій при наближенні до критичної точки), до іншого класу відносяться явища самоорганізованої критичності (тут степеневі закони виникають завдяки нелінійним взаємодіям між складовими системи). Явища, про які йшла мова в цьому підрозділі, як правило вважають спричиненими або так званим сценарієм *переважного приєднання* (preferential attachment) або сценарієм *оптимізації*. Сценарій оптимізації, запропонований Мандельбротом (*Benoit Mandelbrot*, 1924 – 2010), базується на теорії інформації і степеневі закони в ньому виникають внаслідок оптимізації середньої кількості переданої інформації і затрачених витрат. Сценарій переважного приєднання передбачає, що при еволюції системи її нові елементи переважно утворюють зв'язки з тими, що вже мають більше зв'язків, інколи такий сценарій називають reach gets reacher. Серед найбільш відомих моделей, в яких реалізується такий сценарій – модель Саймона (*Herbert Simon*, 1916 – 2001) [33]. Зокрема, такий сценарій застосовується для пояснення виникнення безмасштабних мереж, про які мова йтиме в наступному підрозділі. Проте деякі моделі стохастичних процесів не попадають у жоден із перелічених вище класів (такі як модель черг в теорії масового обслуговування [34],[19] **c** чи запропонована американським психологом Міллером (*G. A Miller*, 1957) модель випадкового друкування [31]).

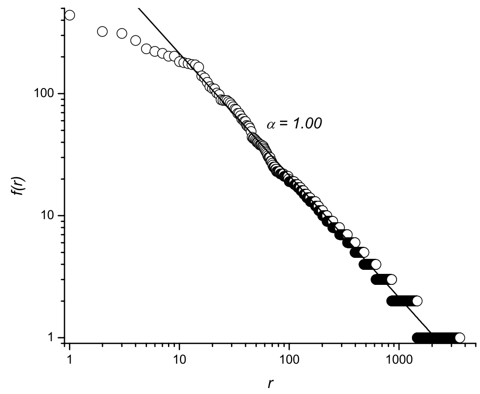


Рис. 6. Залежність частота-ранг для слів із твору Івана Франка "Лис Микита" [19] **b** . Суцільна пряма – апроксимація степеневою функцією (10) із показником $\alpha = 1.00$.

4.3 Складні мережі

Останнім часом у фізичній літературі все частіше зустрічається поняття складної мережі – complex network [35]. З математичної точки зору кожна мережа – це граф, що складається з набору вершин і ребер (у фізичній літературі часто вживаються терміни вузли - links - і зв'язки - nodes). Багато природних або створених людиною систем мають форму мереж: це нейронні мережі, мережі метаболізму, харчування, інтернет, www, транспортні, розподільчі (наприклад кровоносні артерії чи поштова служба), соціальні мережі, та багато інших. Об'єктами фізичного аналізу мережі стали недавно, перші статті датуються кінцем 1990-их років. Мета досліджень змінилася від аналізу невеликих графів та властивостей окремих вершин та ребер до розгляду статистичних властивостей цих графів (мереж). Із зміною мети змінилися і методи аналізу і зараз в цій ділянці успішно застосовуються методи статистичної фізики складних систем.

З емпіричних досліджень стало зрозумілим, що найбільш важливі мережі мають специфічну структуру, яка характеризується розподілом ступенів вузлів $P(k)$ з товстим хвостом:

$$P(k) \sim k^{-\lambda},\ k \gg 1. \tag{11}$$

Тут k – ступінь вузла, тобто кількість приєднаних до нього зв'язків, а $P(k)$ – імовірність того, що ступінь довільно вибраного вузла мережі рівний k . Мережі, які характеризуються степеневим загасанням функції $P(k)$ називаються *безмасштабними* – scale-free. Такі мережі володіють цілою низкою унікальних властивостей, що відрізняють їх від мереж з, наприклад, експоненційним загасанням $P(k)$. На час виникнення науки про мережі математична теорія випадкових ґрафів була добре розроблена фактично для найпростішого об'єкту, так званого випадкового ґрафу Ердіша-Реньї (*P. Erdös, A. Rényi*), функція $P(k)$ якого загасає експоненційно.[5] То ж передбачення цієї теорії не працювали при застосуванні до мереж реального світу. Саме тоді і виникло поняття складна мережа, під яким, фактично, розумілась будь-яка мережа, складніша за класичний випадковий ґраф Ердіша-Реньї. Складні мережі володіють надзвичайно короткою середньою відстанню між вузлами (так звані мережі тісного світу – small world networks), це сильно скорельовані структури, яким притаманні ефекти самоорганізації. Такі особливості будови складних мереж, в свою чергу, спричиняють цілий ряд особливостей процесів, що відбуваються на мережах. Приведемо нижче два приклади, що ілюструють це твердження. Перший приклад стосується поведінки складної мережі при поступовому усуненні її компонент (вузлів чи зв'язків), другий – це поведінка системи взаємодіючих частинок, локалізованих на вузлах складної мережі. Очевидно, що у фізичний термінології, перший приклад стосується задачі про перколяцію, а другий – задачі про фазовий перехід лад-безлад.

З перколяцією пов'язані різноманітні явища, що відбуваються з мережами і на них. Величина, що виступає як перколяційний кластер, коли розглядається перколяція на мережі – це гігантська зв'язана компонента, ГЗК (giant connected component). ГЗК мережі – це множина взаємно досяжних вузлів, що містить скінчену частку вузлів навіть у границі, коли розмір мережі $N \to \infty$. Як можна побудувати мережу, що містить ГЗК, та якими є властивості мережі, коли з'являється цей кластер? Які стратегії знищення ГЗК і наскільки стійкою є мережа до застосування різних сценаріїв атак? Як мережею поширюється інфекція і яка оптимальна стратегія імунізації, щоб зупинити це поширення? Пошук відповідь на ці та інші схожі запитання привів до відкриття багатьох незвичних ефектів, що характерні для складних мереж.

Перші докази того, що перколяція на безмасштабних мережах сильно відрізняється від перколяції на d-вимірних ґратках, були отримані при емпіричному аналізі кількох реальних безмасштабних мереж: www та інтернету, метаболізму, мережі харчування (food web), протеїнів [35]. Явищем, яке викликало особливе зацікавлення, стала стійкість цих мереж до викидання їх вузлів. З одного боку виявляється, що ці мережі надзвичайно стійкі до випадкових уражень, з іншого боку, вони вразливі до так званих запланованих атак, коли усуваються відібрані за певними характеристиками компоненти мережі. Аналітичні дослідження привели до ще більш несподіваного результату: для безмежної безмасштабної мережі ГЗК існує при довільній частці викинутих вузлів, якщо лише показник $\lambda < 3$ в (11), а отже поріг протікання на такій мережі відсутній, $p_c = 0$. Таким чином, мережа є надзвичайно стійким до випадкових усувань вузлів, а переходи, які спостерігалися для реальних систем, є лише ефектом скінченного розміру і зникають при (формальній) границі до безмежних систем.

[5] Існують дві моделі класичного випадкового графа: у першій вважається, що M ребер розподілені довільно та незалежно між парами з N вершин графа; у другій моделі фіксується ймовірність m, з якою може об'єднуватись кожна пара вершин. При $m \to 0$, $N \to \infty$ для обох моделей $P(k)$ визначається формулою Пуассона.

Для прикладу, щоб знищити ГЗК мережі інтернету, треба випадковим чином усунути 99 % її вузлів. З іншого боку, ГЗК цієї мережі дуже вразлива до спрямованих атак (коли, наприклад, викидаються вузли з найбільшими ступенями – габи).

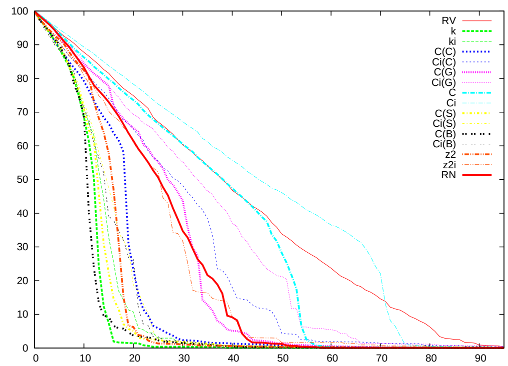


Рис. 7. Стійкість мережі громадського транспорту Парижу до атак – послідовного усування вузлів мережі [19] **d** . Вздовж вертикальної осі відкладено нормалізований розмір найбільшої компоненти мережі, вздовж горизонтальної – процент усунутих вузлів. Різні криві відповідають різним сценаріям атак, при яких відбір вузлів виконувався згідно різних характеристик вузлів.

На Рис. 7 показано результат комп'ютерного моделювання стійкості мережі громадського транспорту Парижу до атак – послідовного усування вузлів мережі [19] **d** . Оскільки ГЗК строго означена лише в границі безмежної мережі, про стійкість мереж реального світу часто судять за поведінкою найбільшої компоненти мережі. З рисунку видно, як реагує найбільша компонента мережі на поступове усування її вузлів (в даному випадку вузли відповідають окремим станціям громадського транспорту). Реакція найбільшої компоненти змінюється від поступового рівномірного спадання (якщо вузли усуваються випадковим чином – тонка червона крива, на рисунку позначена RV), до швидкого зникнення при усуненні 10 – 15 % вузлів (якщо спочатку усуваються вузли з найбільшими ступенями – зелена крива, позначена k на рисунку). Залежно від обраного сценарію усування вузлів спостерігається якісно різна поведінка найбільшої компоненти, як зображено різними кривими (детальніші пояснення можна знайти в [19] **d**). З практичної точки зору, такі дослідження можуть сприяти плануванню ефективних транспортних мереж, на фундаментальному рівні вони відкривають можливість аналізу явища перколяції на випадкових неґраткових системах.

На закінчення цього розділу – декілька слів про особливості переходу лад-безлад, коли система, в якій відбувається фазовий перехід, знаходиться на вузлах нескорельованої безмасштабної мережі. В цьому випадку доречним буде розглянутий в розділі 2 приклад з моделлю

	α	β	γ	δ	α_c	γ_c
$\lambda \geq 5$	0	1/2	1	3	0	2/3
$3 < \lambda < 5$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-3}$	$\frac{1}{\lambda-3}$	1	$\lambda - 2$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-2}$	$\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$

Таблиця 2. Критичні показники, що описують температурні і польові залежності термодинамічних величин (2) – (3) в околі точки фазового переходу для для безмасштабної мережі при різних значеннях λ [35], [19]$^{\mathbf{e}}$.

Ізінґа, але тепер підсумовування в гамільтоніані (1) ведеться не за найближчими сусідами на вузлах d-вимірної ґратки, а за за найближчими сусідами на вузлах безмасштабної мережі із функцією розподілу (11). Така зміна в моделі приводить до суттєвих змін в її критичній поведінці [35], [19]$^{\mathbf{e}}$. Описані у виразах (2)-(3) степеневі залежності зберігають свою форму, критичні показники і далі визначають асимптотику спостережуваних термодинамічних величин при наближенні до критичної точки, однак поняття універсальності модифікується. В число глобальних змінних, які визначають клас універсальності системи тепер входить і змінна λ, що описує загасання $P(k)$ (11). Так, при $\lambda > 5$ спінова система не відчуває присутності мережі: критичні показники показники є показниками теорії середнього поля (див. другий рядок таблиці 2), в ділянці $3 < \lambda < 5$ критичні показники стають функціями λ (див. третій рядок), а при $\lambda < 3$ система залишається впорядкованою при будь якій скінченій температурі. Цей результат легко зрозуміти, якщо згадати, що із зменшенням λ товстішає хвіст розподілу (11), а отже зростає роль вузлів з найбільшими ступенями – габів. Саме габи є визначальними у формуванні незвичних властивостей складних мереж.

5 QUO VADIS, $\varphi\acute{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$?

Спосіб побудови цієї статті дає змогу обійтися без розлогих висновків: основні твердження – що таке складна система взагалі, що таке складна система для фізика і чим займається статистична фізика складних систем – сформульовані вже у Вступі. У решта розділів приведено ілюстрації, що мають на меті увести в коло задач і понять цієї науки. За кадром залишилися методи, а це, фактично, весь спектр методів сучасної статистичної фізики. Зокрема, для отримання конкретних результатів, які приводилися в розділах 3, 4 були застосовані як аналітичні підходи (теоретико-польова ренормалізаційна група, функціональне інтегрування, пересумовування розбіжних рядів, феноменологічний термодинамічний підхід) так і комп'ютерне моделювання та емпіричний аналіз баз даних [17, 18, 19]. Саме методи, понятійний апарат і концепції статистичної фізики кооперативних явищ допомагають виявити спільні риси, що відбуваються в докорінно відмінних за своєю природою системах, зрозуміти їх причини, застосувати спільні моделі для їх кількісного опису і прогнозування їх поведінки. Якраз цим і займається статистична фізика складних систем.

На закінчення висловлюю щиру подяку своїм колегам – Райнгардові Фольку (Лінц), Бертранові Бершу (Нансі), Бертранові Делямоту, Домінікові Муані (Париж), Тарасові Головачу, Ральфові Кенні, Крістіанові фон Ферберу (Ковентрі), Василеві Пальчикову (Гельсінкі), Тарасові Яворському (Майнц), Вікторії Блавацькій, Максимові Дудці, Олександрові Капікраняну, Олесі Мриглод (Львів), у співпраці з якими були отримані результати [17, 18, 19], приведені в розділах 3,4 цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Див. наприклад: *P.F. Henshaw, M. McGinley, C.M. Hogan.* Complex Systems. In: Encyclopedia of Earth, ed. by Cutler J. Cleveland (Washington, D.C.: Environmental Information Coalition, National Council for Science and the Environment); *B.J. Caldwell.* Cahiers de d'épistémologie **292** (2003) 23 p.

[2] *G. Parisi.* Physica A **263** (1999) 557.

[3] *P.W. Anderson.* Science **177** (1972) 293.

[4] *D. Sherrington.* Phil. Trans. Roy. Soc. A **368** (2010) 1175.

[5] *N. Goldenfeld, L. P. Kadanoff.* Science **284** (1999) 87.

[6] *S. Solomon, B. Shir.* Europhys. News. March/April (2003) 54.

[7] *D. Sornette.* Critical phenomena in natural Sciences. (New York: Springer-Verlag, 2001).

[8] *А.И. Олемской.* Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория. (Москва, URSS, 2009, 379 с).

[9] *D. Stauffer.* Physica A **285** (2000) 121.

[10] *E. Ising.* Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetism (Hamburg, 1924); Z. Phys. **31** (1925) 253.

[11] *C. Domb.* The Critical Point. (Taylor & Francis, London, 1996).

[12] Про життя Е. Ізинґа можна прочитати в статті *S. Kobe.* Journ. Stat. Phys. **88** (1997) 991; український переклад: *С. Кобе.* Журн. Фіз. Досл. **2** (1998) 1.

[13] Автор вдячний п. Т. Ізинґу за дозвіл опублікувати фото з його приватного архіву.

[14] *L. P. Kadanoff, et al.* Rev. Mod. Phys. **39** (1967) 395; *M. E. Fisher.* Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 653; *C. Itzykson, J. M. Drouffe.* Statistical Field Theory. (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).

[15] И.Р. Юхновский, Ю.К. Рудавский. Препринт ИТФ-74-171Р. Киев, 1974.

[16] *И.Р. Юхновский.* Фазовые переходы второго рода. Метод коллективных переменных. (Киев, Наукова думка, 1985); *І. Юхновський, М. Козловський, І. Пилюк.* Мікроскопічна теорія фазових переходів у тривимірних системах. (Львів, Євросвіт, 2001).

[17] [a] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii. УФН **173** (2003) 175 [Physics-Uspiekhi **46** (2003) 169]; [b] *Yu. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka, C. von Ferber, R. Folk, T. Yavors'kii.* Int. J. Mod. Phys. B **16** (2002) 4027; [c] *M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch.* J.Magn.Magn.Mat. **294** (2005) 305; [d] *O. Kapikranian, B. Berche, Yu. Holovatch.* Phys. Lett. A **372** (2008) 5716; [e] *B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna.* Phys. Rev. B **82** (2010) 104432.

[18] [a] *C. von Ferber, Yu. Holovatch.* Phys. Rev. E **56** (1997) 6370; [b] *C. von Ferber, Yu. Holovatch.* Phys. Rev E **59** (1999) 6914; [c] *V. Blavats'ka, C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch.* Renormalization group approaches to polymers in disordered media. In: Statistics of Linear Polymers in Disordered Media, ed. by Bikas K. Chakrabarti (Elsevier, Amsterdam, 2005) pp.103-148.

[19] [a] *Ю. Головач, К. фон Фербер, О. Олемской, Т. Головач, О. Мриглод, І. Олемской, В. Пальчиков.* Журн. Фіз. Досл. **10** (2006) 247; [b] *Ю. Головач, В. Пальчиков.* Журн. Фіз. Досл. **11** (2007) 22; [c] *O. Mryglod, Yu. Holovatch.* Condens. Matter Phys. **10** (2007) 129; [d] *C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch.* Attack Vulnerability of Public Transport Networks. In: Traffic and Granular Flow'07, ed. by C. Appert-Rolland et al. (Springer, Berlin Heidelberg, 2009), p. 721-732. [e] *V. Palchykov, C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch, R. Kenna.* Phys. Rev. E **82** (2010) 011145.

[20] *M. Mézard, G. Parisi, M. A. Virasoro.* Spin Glass Theory and Beyond. (World Scientific, Singapore, 1987).

[21] Order, Disorder and Criticality. Advanced Problems of Phase Transition Theory, ed. by Yu. Holovatch. **vol. 1**: (World Scientific, Singapore, 2004); **vol. 2**: (World Scientific, Singapore, 2007).

[22] *P.-G. de Gennes.* Scaling Concepts in Polymer Physics. (Cornell University Press, Ithaca, 1979).

[23] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1991/

[24] *J. Feder.* Fractals. (Plenum Press, New York and London, 1988).

[25] *T.C. Schelling.* J. Math. Sociol. **1** (1971) 143, *D. Stauffer, S. Solomon.* Eur. Phys. J. B **57** (2007) 473.

[26] *A. Quetelet.* A Treatise on Man and the Development of His Faculties. (1842) Scholars Facsimilies & Reprint. ISBN 0-8201-1061-2.

[27] *L. Bachelier.* Combined volume prints of "Théorie de la spéculation" and "Théorie mathématique du jeu". (Editions Jacques Gabay, 1995) ISBN 2876471299.

[28] *R. N. Mantegna, H. E. Stanley.* Introduction to Econophysics: Correlations & Complexity in Finance (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[29] The complex networks of economic interactions. Essays in agent-based economics and econophysics, ed. by A. Namatame, T. Kaizouji, Y. Aruka. (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006)

[30] *S. Galam, Y. Gefen, Y. Shapir.* J. Math. Sociol. **9** (1982) 1; *S. Galam.* Physica A **336** (2004) 49.

[31] *M. Mitzenmacher.* Internet Math. **1** (2003) 226; *M. E. J. Newman.* Contemp. Phys. **46** (2005) 323; *M.V. Simkin, V.P. Roychowdhury.* arXiv:physics/0601192v2.

[32] *G. F. Zipf.* The Psycho-Biology of Language. (Houghton-Mifflin, Boston, 1935). Бібліографію робіт про закон Зіпфа можна знайти на сайті: http://www.nslij-genetics.org/wli/zipf/

[33] *H. A. Simon.* Biometrika **42** (1955) 425.

[34] *A. Barabási.* Nature **435** (2005) 207.

[35] *S. N. Dorogovtsev, S. N. Mendes.* Evolution of Networks. (Oxford University Press, Oxford, 2003); *R. Albert, A.-L. Barabási.* Rev. Mod. Phys. **74** (2002) 47; *A.-L. Barabási.* Linked: The New Science of Networks. (Perseus Press, New York, 2002).

FROM THE ISING MODEL TO STATISTICAL PHYSICS OF COMPLEX SYSTEMS

Yurij HOLOVATCH

Institute for Condensed Matter Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, 1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine

It is a short essay on statistical physics of complex systems, a trend of studies which nowadays acquires all features of a well defined branch of science with its own subject of analysis, system of notions and methods. The Ising model is chosen as a starting point for an exposé. Apart from conceptual simplicity, such a choice makes it possible to follow the formation and development of the phase transition theory in the Lviv school of statistical physics. Considerations adduced herein give a brief account of a talk given at the workshop on the occasion of academician I.R. Yukhnovskii's 85th anniversary.